Хомогенни координати и координатни системи

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

17 януари 2019

Това са теми 25 и 26 от конспекта за 2018-2019г., базирани на лекциите от 2015г.

1. Хомогенни афинни координати

1.1. В проективното пространство P_3

Нека $K = Oxyz$ е афинна координатна система в A_3.

Определение. Координатите на крайните точки относно K, които са използвани в досегашните теми, ще наричаме нехомогенни координати относно K и ще означаваме с главни букви - X, Y, Z.

Определение. 1) Ако P е крайна точка с нехомогенни координати (X, Y, Z) относно K, то <u>хомогенни афинни координати</u> на P спрямо K наричаме всяка четворка (x, y, z, t), за която $t \neq 0$ и

$$X = \frac{x}{t}, Y = \frac{y}{t}, Z = \frac{z}{t}.$$

2) Ако $P = U_l$ е безкрайна точка (на правата l), то <u>хомогенните афинни координати</u> на P спрямо K са всяка четворка на взимаме $(x, y, z, 0)$, където (x, y, z) са нехомогенни координати относно K на ненулев вектор, който е колинеарен с l.

Забележка.

1. Всяка ненулева четворка $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}$ представлява хомогенни координати на някоя точка в разширеното пространство.

   $(0, 0, 0, 0)$ не представлява хомогенни координати на никоя точка.

2. Ако P има хомогенни координати (x, y, z, t), то P е крайна $\iff$ $t \neq 0$ и P е безкрайна $\iff$ $t = 0$.

3. Ако P е крайна точка с нехомогенни координати (X, Y, Z) относно K, то една четворка хомогенни координати е $(X, Y, Z, 1)$.

Твърдение 1. *Нека P има спрямо K хомогенни координати (x, y, z, t). Тогава (x', y', z', t') са хомогенни координати на P спрямо $K \iff \exists \rho \in \mathbb{R}$, такова че $x' = \rho x, y' = \rho y, z' = \rho z, t' = \rho t$.*

Доказателство.

1. Ако P е крайна точка, то $t \neq 0$. Взимаме

$$X = \frac{x}{t}, Y = \frac{y}{t}, Z = \frac{z}{t}.$$

   Нека (x', y', z', t') са хомогенни координати на $P \implies t' \neq 0$,

$$X' = \frac{x'}{t'}, Y' = \frac{y'}{t'}, Z' = \frac{z'}{t'}.$$

   Означаваме $\rho = \frac{t'}{t} \neq 0$.

$$x' = t'X = \frac{t'}{t}x = \rho x, y' = \rho y, z' = \rho z, t' = \rho t.$$

   Нека (x', y', z', t') е такава, че

$$x' = t'X = \frac{t'}{t}x = \rho x, y' = \rho y, z' = \rho z, t' = \rho t,$$

   където $\rho \neq 0$. Тогава $t' \neq 0$, защото $\rho \neq 0$ и $t \neq 0$.

   Следователно

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x}{t} = X, \frac{y'}{t'} = \frac{y}{t} = Y, \frac{z'}{t'} = \frac{z}{t} = Z,$$

   $\implies (x', y', z', t')$ са хомогенни координати на P.

2. Ако $P = U_l$ е безкрайна точка, то $t = 0$ и (x, y, z) са координати относно K на вектор ненулев вектор $v \parallel l$.

   Нека (x', y', z', t') са хомогенни координати на P относно K, следователно $t' = 0$ и (x', y', z') са координати на ненулев вектор $v' \parallel l$.

   Следователно $v \parallel v'$ и $v \neq 0$, а значи съществува $\rho \neq 0$, такова че $v' = \rho v$ ($\rho \neq 0$, защото $v' \neq 0$).

   Следователно

$$x' = \rho x, y' = \rho y, z' = \rho z, t' = 0 = \rho t.$$

   Обратно, нека (x', y', z', t') са такива, че

$$x' = \rho x, y' = \rho y, z' = \rho z, t' = \rho t = 0$$

   за някое $\rho \neq 0$. Нека v' е векторът с координати (x', y', z') спрямо K. Имаме, че $v' = \rho v \implies v' \parallel v \implies v' \parallel l$ и $v' \neq 0$, защото $\rho \neq 0$ и $v' \neq 0$.

   Следователно $(x', y', z', 0)$ са хомогенни координати на P относно K.

$\square$

Теорема 1. *Всяка проективна равнина има спрямо K уравнение в хомогенни координати от вида $Ax + By + Cz + Dt = 0$, където $(A, B, C, D) \neq 0$. Обратно, всяко уравнение от този вид е уравнение в хомогенни координати спрямо K на някоя проективна равнина.*

Доказателство. Нека π е проективна равнина.

1. Ако $\pi = \overline{\rho}$, където ρ е крайна равнина, то ρ има спрямо K уравнение в нехомогенни координати

   $$AX + BY + CZ + D = 0,$$

   където $(A, B, C) \neq 0$.

   Нека т. P има хомогенни координати (x, y, z, t).

   Ако P е крайна точка с нехомогенни координати (X, Y, Z), то

   $$X = \frac{x}{t}, Y = \frac{y}{t}, Z = \frac{z}{t}$$

   и

   $$\begin{aligned} P \in \pi = \overline{\rho} \iff P \in \rho \iff AX + BY + CZ + D = 0 \iff \\ \iff A\frac{x}{y} + B\frac{y}{t} + C\frac{z}{t} + D = 0 \iff Ax + By + Cz + Dt = 0. \end{aligned}$$

   Ако $P = U_l$ е безкрайна, то $t = 0, v \parallel l, v \neq 0$. Тогава

   $$\begin{aligned} P \in \pi = \overline{\rho} \iff P \in U_\rho \iff l \parallel \rho \iff v(x, y, z) \parallel \rho \iff \\ \iff Ax + By + Cz = 0 \iff Ax + By + Cz + Dt = 0. \end{aligned}$$

   Получихме, че за произволна точка P с хомогенни координати (x, y, z, t) имаме $P \in \pi \iff Ax + By + Cz + Dt = 0$. Следователно π има уравнение $Ax + By + Cz + Dt = 0$ в хомогенни координати спрямо K.

2. Ако $\pi = \Omega$ (безкрайната равнина), то $P(x, y, z, t) \in \Omega \iff t = 0$. Следователно $\Omega : t = 0$, т.е. тук $D = 1 \neq 0$.

   С това е доказана правата посока. Обратно, ако $A = B = C = 0$, то $D \neq 0$ и $Dt = 0$, което е еквивалентно на $t = 0$. Тоест това е уравнение на Ω.

   Ако $(A, B, C) \neq 0$, то от правата посока следва, че уравнението е уравнение на равнината $\pi = \overline{\rho}$, където ρ е крайната равнина с уравнение в нехомогенни координати

   $$AX + BY + CZ + D = 0.$$

$\square$

Теорема 2. *Нека проективните равнини π_1 и π_2 имат спрямо K уравнение в хомогенни координати*

$$\pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i t = 0, i = 1, 2.$$

Означаваме

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Тогава:

1. $\pi_1 = \pi_2 \iff r(A) = 1$

2. $\pi_1 \neq \pi_2 \iff r(A) = 2$

Доказателство. Редовете на A са ненулеви (защото са коефициенти в уравнението на π_1 и π_2), следователно $r(A) = 1$ или $r(A) = 2$.

За π_1 и π_2 имаме, че или $\pi_1 = \pi_2$, или $\pi_1 \neq \pi_2$. За $r(A)$ имаме, че или $r(A) = 1$, или $r(A) = 2$.

Следователно 1 и 2 са еквивалентни. Ще докажем.

($\Longleftarrow$) Нека $r(A) = 1$. Тогава $\exists \rho \neq 0 : A_2 = \rho A_1, ..., D_2 = \rho D_1$ и уравнението на π_2 е $\rho(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 t) = 0$ и това е еквивалентно на уравнението на $pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 t \implies \pi_1 = \pi_2$.

($\Longrightarrow$) Нека $\pi_1 = \pi_2$.

$$P(x, y, z, t) \in \pi_1 \iff A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 t = 0.$$

Нека за определеност $A_1 \neq 0$. Тогава $P(x, y, z, t) \in \pi_1 \iff$

$$X = -\frac{B_1}{A_1} y = -\frac{C_1}{A_1} z - \frac{D_1}{A_1} t.$$

Ако $(y, z, t) = 0$, то $x = 0$. Но $(0, 0, 0, 0)$ не са координати на нито една точка.

Нека $(y, z, t) \neq 0$. Имаме

$$P\left(-\frac{B_1}{A_1} y - \frac{C_1}{A_1} z - \frac{D_1}{A_1} t, y, z, t\right) \in \pi_1 = \pi_2.$$

Заместваме в уравнението на π_2:

$$A_2(-\frac{B_1}{A_1} y - \frac{C_1}{A_1} z - \frac{D_1}{A_1} t + B_2 y + C_2 z + D_2 t = 0,$$

което е еквивалентно на

$$\left(B_2 - \frac{A_2}{A_1} B_1\right) y + \left(C_2 - \frac{A_2}{A_1} C_1\right) z + \left(D_2 - \frac{A_2}{A_1} D_1\right) t = 0.$$

Следователно уравнението е удовлетворено на всяка тройка (y, z, t) (даже за 0). Означаваме $\frac{A_2}{A_1} = \rho$, откъдето следва

$$A_2 = \rho A_1, B_2 = \rho B_1, C_2 = \rho C_1 . D_2 = \rho D_1.$$

Това означава, че $r(A) = 1$. □

Теорема 3. *Всяка проективна права се задава в хомогенни координати спрямо K със система от вида*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1t = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2t = 0, \end{cases} \tag{1}$$

където рангът на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

е $r(A) = 2$. *Обратно, всяка система от този вид задава спрямо K проективна права.*

Доказателство. Нека l е проективна права. Тогава $l = \pi_1 \cup \pi_2$. По теорема 1 π_i : $A_ix + B_iy + C_iz + D_it = 0, i = 1, 2$ и по теорема 2 $r(A) = 2$, т.е

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1t = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2t = 0, \end{cases}$$

Обратно, ако имаме такава система, то по теорема 1 двете уравнения са уравнения на равнини π_1 и π_2. Имаме, че

$$r(A) = 2,$$

следователно по теорема 2 π_1 и π_2 са пресекателни и $l = \pi_1 \cup \pi_2$ е права, която се задава със системата (1). □

Теорема 4. *Нека различните точки P_1 и P_2 имат спрямо K хомогенни координати $P_i(x_i, y_i, z_i, t_i), i = 1, 2$. Тогава правата P_1P_2 има в хомогенни координати спрямо K параметрични уравнения*

$$P_1P_2 : \begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \\ t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Доказателство. Нека P_1P_2 се задава спрямо K със системата (1), както в теорема 3. Разглеждаме (1) като хомогенна линейна система с 2 уравнения и 4 неизвестни.

По теорема 3 $r(A) = 2 \implies$ пространството от решенията на системата е двумерно.

Тъй като $P_1, P_2 \in P_1P_2$, то (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) са две решения на (1). Те са линейно независими, защото в противен случай $P_1 = P_2$ по твърдение 1. Значи (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) образуват базис в пространството от решения на (1).

Следователно всяко решение на системата (1) има вида

$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \\ t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2. \end{cases} \tag{2}$$

(x, y, z, t) са хомогенни координати на точка $iff(x, y, z, t) \neq 0, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

$P(x, y, z, t) \in P_1P_2 \iff (x, y, z, t) \neq 0$ и удовлетворява (1) $\iff (x, y, z, t)$ се получават от (2) за някои $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$. Следователно (2) е параметрично уравнение на P_1P_2. $\square$

Теорема 5. *Нека т. P_1, P_2, P_3 не лежат на една проективна права и имат спрямо K хомогенни координати*

$$P_i(x_i, y_i, z_i, t_i), i = 1, 2, 3.$$

Тогава равнината π през P_1, P_2, P_3 има спрямо K в хомогенни координати общо уравнение

$$\pi : \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ t & t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

и параметрично уравнение

$$\pi : \begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 \\ t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 t_3 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \tag{4}$$

Доказателство. Нека $\pi : Ax + By + Cz + Dt = 0$. Разглеждаме това уравнение като хомогенна система от 1 уравнение и 4 неизвестни. Пространството от решения е тримерно.

Тъй като $P_1, P_2, P_3 \in \pi$, техните координати са решения. Те са линейно независими. Наистина, ако допуснем, че те са линейно зависими, то те или съвпадат, или от теорема 4 $P_3 \in P_1P_2$. Но по условие те не лежат на една проективна права. Значи P_1, P_2 и P_3 образуват базис в пространството от решения.

Следователно (x, y, z, t) е решение $\iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 \\ t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 t_3. \end{cases}$$

Освен това (x, y, z, t) са хомогенни координати на някоя точка P точно тогава, когато $(x, y, z, t) \neq 0 \iff (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$. Следователно т. $P(x, y, z, t) \in \pi \iff \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0 : (x, y, z, t)$ се задава с параметричното уравнение (5).

Също (x, y, z, t) е линейна комбинация на $(x_i, y_i, z_i, t_i), i = 1, 2, 3$ точно тогава, когато детерминантата в (6) се анулира, т.е. π има общо уравнение (6). $\square$

1.2. Хомогенни координати в проективната равнина P_2

Определението е аналогично, както и тв. 1. Аналозите на теореми 1, 2 и 5 са

Теорема 6. *Всяка проективна права има спрямо K уравнение в хомогенни координати от вида $Ax + By + Ct = 0$, където $(A, B, C) \neq 0$. Обратно, всяко уравнение от този вид е уравнение в хомогенни координати спрямо K на някоя проективна права.*

Теорема 7. *Нека проективните прави l_1 и l_2 имат спрямо K уравнение в хомогенни координати*

$$\pi_i : A_i x + B_i y + C_i t = 0, i = 1, 2.$$

Означаваме

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

Тогава:

1. $l_1 = l_2 \iff r(A) = 1$
2. $l_1 \neq l_2 \iff r(A) = 2$

Теорема 8. *Нека различните точки P_1 и P_2 имат спрямо K хомогенни координати*

$$P_i(x_i, y_i, t_i), i = 1, 2.$$

Тогава правата P_1P_2 има спрямо K в хомогенни координати общо уравнение

$$\pi : \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ t & t_1 & t_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

и параметрично уравнение

$$\pi : \begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \tag{6}$$

2. Смяна на хомогенните координати

Работим едновременно в проективното пространство P_3 и проективната равнина P_2.

Теорема 9. *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ и $K' = O'e_1 \dots e'_n$ са афинни координатни системи, нека матрицата на прехода от базиса $(e_1, \cdots, e_n)$ към базиса $(e'_1, \cdots, e'_n)$ е T, а нехомогенните координати на O' спрямо K са S (стълб от $\mathbb{R}^n$).*

Тогава, ако т. P има спрямо K и K' хомогенни координати съответно

$$x = (x_1, \cdots, x_n)^T$$

и

$$x' = (x'_1, \cdots, x'_n)^T,$$

то

$$x = \rho \left(\begin{array}{c|c} T & S \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) x', \tag{7}$$

където $\rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0$.

Доказателство.

1. Нека P е крайна точка с нехомогенни координати $X, X' \in \mathbb{R}^n$ съответно относно K, K'.

   Знаем, че $X = TX' + S$. Знаем и че $\begin{pmatrix} X \\ \hline 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} X' \\ \hline 1 \end{pmatrix}$ са хомогенни координати на P относно K, K'.

   Следователно $\exists \lambda \neq 0, \lambda' \neq 0$:

   $$x = \lambda \begin{pmatrix} X \\ \hline 1 \end{pmatrix} \text{ и } x' = \lambda' \begin{pmatrix} X' \\ \hline 1 \end{pmatrix}.$$

   Тогава

   $$x = \lambda \begin{pmatrix} X \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} TX' + S \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \lambda \left(\begin{array}{c|c} T & S \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} X' \\ \hline 1 \end{pmatrix}. = \lambda \left(\begin{array}{c|c} T & S \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \frac{x'}{\lambda'}.$$

2. Нека $P = U_l$ е безкрайната точка на правата l и нека ненулевият вектор $v \parallel l$ има координатни стълбове $a, a' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ относно съответно K и K'. Тогава $\begin{pmatrix} a \\ \hline 0 \end{pmatrix}$ са хомогенни координати на P относно K.

   Знаем, че $a = Ta'$, следователно съществуват $\lambda, \lambda' \neq 0$, такива че $x = \lambda \begin{pmatrix} a \\ \hline 0 \end{pmatrix}$ и $x' = \lambda' \begin{pmatrix} a' \\ \hline 0 \end{pmatrix}$. Тогава

   $$x = \lambda \begin{pmatrix} a \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} Ta' \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \lambda \left(\begin{array}{c|c} T & S \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} a \\ \hline 0 \end{pmatrix}. = \lambda \left(\begin{array}{c|c} T & S \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \frac{x'}{\lambda'}$$

   .

И в двата случая означаваме $\rho = \frac{\lambda}{\lambda'}$ и получаваме (7). □